Title	端子間容量行列の枝容量和最小実現の枝数最小化について(グラフ理論とその応用)
Author(s)	梶谷, 洋司; 上野, 修一; 宮坂, 健一
Citation	数理解析研究所講究録 (1984), 534: 262-273
Issue Date	1984-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/98632
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
534巻 1984年 262-273

端子間容量行列の枝容量和最小実現の枝数最小化について

梶谷 洋司　　上野 修一　　宮坂 健一
東工大 工学部

I. まえがき

端子数nのフローネットワークの第i番目と第j番目の2端子間に流せる最大フローをi行j列の要素とするn次の正方行列を端子間容量行列という。与えられた実数行列が端子間容量行列として実現可能であるための条件や，その最小コストでの構成法等については1960年代を中心に盛んに研究され種々の結果が得られた。しかし、当時の中心的話題のひとつであった枝容量和最小という条件下での枝数最小化については未解決のまま今日に至っている。ここでは、無向フローネットワークについてこの問題に新しい知見を得たので報告する。

与えられた行列が端子間容量行列であるための必要十分条件は、1960年に前田[1]によって求められた。同論文は同時に、任意の端子間容量行列を木状のフローネットワークで構成できることを示している。これは自明に枝数最小実現であるが、$n \geq 3$の時は常に枝容量和最小でない。枝容量和最小構成法は1960年に、R.T.Chien[2]によって求められた。

しかしこれは完全グラフという固定された構造による実現であり枝数は最大となる。これに対し枝容量和最小で枝数が最大 $2n-3$ である構成法が、1961年O. WingとR. T. Chien[3]によって求められた。しかしこれもグラフの構造が特殊な直並列という限定されたものであり、枝数最小化には限界がある。1961年R. E. GomoryとT. C. Hu[4]は枝容量和最小で構成アルゴリズムの中に任意性を含む方法を提案したが、この方法によっても[3]で可能である枝数より少ない枝数で構成はできない。

以上の様な結果を踏まえ、本文では枝数が在来の構成法以下でありしかも真に少ない場合も含む組織的な枝容量和最小構成アルゴリズムを提案する。これは[3], [4]の方法を原理的に含むものである。

2. 準　備

単純無向グラフGの点集合を $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$、枝集合をEと記す。2点 v_i, v_j 間の枝を $e(v_i, v_j)$ と記す。$e(v_i, v_j)$ に対し正の実数重み $c(e(v_i, v_j))$ が定義された時、Gは無向フローネットワークを表す。以後グラフとそれに対応するネットワークを特に区別しない。枝集合 $E_s \subseteq E$ に対して E_s に属す全ての枝の容量の和を E_s の容量と呼ぶ。2点 v_i, v_j 間の端子間容量とは、Gを v_i をソース、v_j をシンクと

する2端子ネットワークと考えたときの最大フローであり、これを$t(v_i, v_j)$と記す。$t(v_i, v_j)$はv_iとv_jを分離するカットの容量の最小値と一致する。(最大フロー最小カット定理)

Gの(端子間)容量行列とはi行j列の要素が$i \neq j$のとき$t(v_i, v_j)$、$i=j$のとき∞であるようなn次の正方行列である。n次の非負対称行列Mがネットワークの容量行列であるための必要十分条件は、行列が基本分割可能であることが知られている。[1] すなわちMは適当な行と列の対称な置換によってMは次の様にできる：i行$i+1$列($i=1,2,\cdots,n-1$)の要素をt_i、t_iの全集合をTとするとき、対角を除く上半三角行列は各1個のt_iを含み全ての要素がt_iと同じ値を持つ$n-1$個の矩形領域に非共通に分割できる。この分割においてt_iが決める矩形行列$M(t_i)$の行全体および列全体それぞれに対応する点集合を$V_R(t_i)$, $V_L(t_i)$と記す。

$V_R(t_j) \cup V_L(t_j) \subseteq V_R(t_i)$, 又は$\subseteq V_L(t_i)$が成立する時$t_i \Rightarrow t_j$と記す。この$(T, \Rightarrow)$は半順序集合を成す。複数個の$T$の要素が等しい値のとき分割は一意的とは限らないが、$(T, \Rightarrow)$の構造は同値要素を区別しなければ一意的である。t_iの値を$\|t_i\|$とするとき、$t_i \Rightarrow t_j$ならば$\|t_i\| \leq \|t_j\|$である

さて、$t_i \Rightarrow t_j$のときt_i(t_j)をt_j(t_i)の祖先(子孫)といい、直接の祖先，子孫を親，子と呼ぶ。基本分割の性質

から次の性質が成立する。$(T, \Rightarrow)$のハッセ図は$\Rightarrow$の向きに矢印を付与して描くと、Tの最小要素を根とし各点の出次数は高々2の2進木(の部分グラフ)である。以下Tとそのハッセ図を同一視し、出次数0, 1, 2の点(t_i)をそれぞれ葉, 幹, 叉と呼ぶ。叉によって分かれる葉に向かう2個のパスをその叉の系と呼ぶ。t_iについて$|V_L(t_i)|$, $|V_R(t_i)|$は、t_iが葉であれば共に1、幹ならば一方のみが1、叉であれば共に2以上である。

3. 構　成　法

(定理1) 以下のアルゴリズムMINET(M)は所定の容量行列Mを実現する。 ☒

(アルゴリズム:MINET(M))

入力:M又はそれから得られる$(T, \Rightarrow)$

出力:無向フローネットワーク$G=(V, E)$

S1) Tの要素t_iを次のように和分解する式の組を求める

// 式数だけ出力Gの枝数が減少する

t_iが葉のとき

(A)　$2t_i = t_{i1} + t_{i2} + \cdots$

但し、右辺項は全てt_iの祖先で、特に第1項t_{i1}はt_iの親

t_iが葉でないとき

(B)　$t_i = t_{i_1} + t_{i_2} + \cdots\cdot$

但し、右辺項は全てt_iの祖先で、第1項t_{i_1}はt_iの親

（式の組を作る際の条件）葉は１通り、葉以外は２通りの分解が許される。全分解式を通じて右辺には幹は１回又は２回異なる式で用いて良い。但し後者の場合その叉の子孫であるものは各式で異なる系に属さねばならない

S②) $D \leftarrow T$: $V \leftarrow \{v_i \mid 1 \leqq i \leqq n\}$: $E \leftarrow \phi$: $I \leftarrow 0$

$G^I \leftarrow (V, E)$

S③) $t \leftarrow D$の要素中（$D, \Rightarrow$）のハッセ図で葉であるもの（の1つ）

Tにおいて、

tが葉、すなわち$V_R(t) = \{v_i\}$, $V_L(t) = \{v_k\}$ ならばS④)へ

tが幹、すなわち$V_R(t) = \{v_i\}$, $|V_L(t)| \geqq 2$　ならばS⑤)へ

tが叉、すなわち$|V_R(t)|$, $|V_L(t)| \geqq 2$　ならばS⑥)へ

S④) $E \leftarrow E + e(v_i, v_k)$ // 新しい枝の付加

$C(e(v_i, v_k)) \leftarrow \|t\|$ // 新しい枝の容量を決定

$G^{I+1} \leftarrow (V, E)$

S⑦)へ

S⑤)（t_r（およびt_s）の決定）

（５－１）tが分解式の右辺に存在しない場合

$t_r \leftarrow t$の子

サブルーチンAへ（$v_k, v_l \mid t_r, V_L(t)$）// t_rを用いて

$V_L(t)$の中からv_k, v_lを決定

(5－2) tが分解式の右辺第1項に存在する場合

$t_r \leftarrow$ その分解式の左辺

サブルーチンAへ($v_k, v_l \mid t_r, V_L(t)$)

(5－3) tが分解式の右辺第2項以降に存在する場合

$t_r \leftarrow$ その分解式の左辺

$t_s \leftarrow$ その分解式の右辺第1項

サブルーチンBへ($v_k, v_l \mid t_r, t_s, V_L(t)$) // t_rおよびt_sを用いて$V_L(t)$の中からv_k, v_lを決定

S⑤')(新枝の付加および容量決定)

$E \leftarrow E + \{e(v_i, v_k), e(v_i, v_l)\}$ //新しい枝の付加

$c(e(v_i, v_k)) \leftarrow \|t\|/2$

$c(e(v_i, v_l)) \leftarrow \|t\|/2$

$c(e(v_k, v_l)) \leftarrow c(e(v_k, v_l)) - \|t\|/2$ //既存枝の容量変更

$c(e(v_k, v_l)) = 0$ならば $E \leftarrow E - e(v_k, v_l)$ //その容量が0なら枝を除去

$G^{I+1} \leftarrow (V, E)$

S④)へ行く

S⑥)(t_p, t_r(およびt_q, t_s)の決定)

(6－1) tが分解式の右辺に存在しない場合

$t_p \leftarrow t$の子　但し $V_R(t_p) \cup V_L(t_p) = V_R(t)$

t_r ← t_pと異なる系に属すtの子　但し $V_R(t_r) \cup V_L(t_r) = V_L(t)$

サブルーチンAへ（$v_i, v_j | t_p, V_R(t)$）// v_i，v_jを決定

サブルーチンAへ（$v_k, v_l | t_s, V_L(t)$）// v_k，v_lを決定

（６－２）tが分解式の右辺に１回存在する場合

t_p ← その分解式の左辺　但し $V_R(t_p) \cup V_L(t_p) \subseteqq V_R(t)$

t_r ← t_pと異なる系に属するtの子　但し $V_R(t_r) \cup V_L(t_r) = V_L(t)$

サブルーチンAへ（$v_k, v_l | t_r, V_L(t)$）

（６－２－１）tが分解式の右辺第１項に存在する場合

サブルーチンAへ（$v_i, v_j | t_p, V_R(t)$）

（６－２－２）tが分解式の右辺第２項以降に存在する場合

t_q ← その分解式の右辺第１項

サブルーチンBへ（$v_i, v_j | t_p, t_q, V_R(t)$）

（６－３）tが２つの分解式（（式１）および（式２）とする）の右辺に存在する場合

t_p ←（式１）の左辺　但し $V_R(t_p) \cup V_L(t_p) \subseteqq V_R(t)$

t_r ←（式２）の左辺　但し $V_R(t_r) \cup V_L(t_r) \subseteqq V_L(t)$

（６－３－１）tが（式１）の右辺第１項に存在する場合

サブルーチンAへ（$v_i, v_j | t_p, V_R(t)$）

（６－３－２）tが（式１）の右辺第２項以降に存在する場合

t_q ←（式１）の右辺第１項

サブルーチンBへ（$v_i, v_j | t_p, t_q, V_R(t)$）

(6-3-3) tが(式2)の右辺第1項に存在する場合

サブルーチンAへ($v_k, v_l \mid t_r, V_L(t)$)

(6-3-4) tが(式2)の右辺第2項以降に存在する場合

$t_s \leftarrow$ (式2)の右辺第1項

サブルーチンBへ($v_k, v_l \mid t_r, t_s, V_L(t)$)

S⑥′)(新枝の付加および容量決定)

$E \leftarrow E + \{e(v_i, v_k), e(v_j, v_l)\}$

$c(e(v_i, v_k)) \leftarrow \|t\|/2$

$c(e(v_j, v_l)) \leftarrow \|t\|/2$ //新枝の容量決定

$c(e(v_i, v_j)) \leftarrow c(e(v_i, v_j)) - \|t\|/2$

$c(e(v_i, v_j)) = 0$ ならば $E \leftarrow E - e(v_i, v_j)$

$c(e(v_k, v_l)) \leftarrow c(e(v_k, v_l)) - \|t\|/2$

$c(e(v_k, v_l)) = 0$ ならば $E \leftarrow E - e(v_k, v_l)$

$G^{I+1} \leftarrow (V, E)$

S⑦) $D \leftarrow D - t$

$D = \emptyset$ ならば　$G \leftarrow G^{I+1}$　として終る

そうでなければ　$I \leftarrow I + 1$　としてS③)へ行く

サブルーチンA($v_a, v_b \mid t_x, V_S(t)$)//引数は順番に対応

//t_xをもとにして、$V_S(t)$の中からv_a, v_bを決定

$v_a, v_b \leftarrow$ 2点$v_a, v_b \mid v_a, v_b$はt_xによる部分を構成し

た段階において、付加した新枝(のうちの1

本）の両端点

MINET へもどる

サブルーチンB（$v_a, v_b \mid t_x, t_y, V_s(t)$）

// t_x, t_yをもとにして、$V_s(t)$の中からv_a, v_bを決定

$v_a, v_b \leftarrow$ 2点$v_a, v_b \mid v_a, v_b$はt_xによる部分を構成した段階において付加した新枝のうちt_yによる部分を構成した段階において容量を減じた枝の両端点

MINET へもどる ☒

証明は省くが、このアルゴリズムで実現されるネットワークGは次の性質を持つ。

（定理2）GはMの枝容量和最小実現である。 ☒

（定理3）Gの枝数は$2(n-1)-P-Q$である。ただし、Pは葉の数、QはMINET(M)のSⅡで得られる分解式の個数である。

4. 例 題

次頁のMは①～⑰の17点より成るネットワークの端子間容量行列である。（図1）はそのハッセ図で、数字に付いている□, ◇, △, ▽等の記号は同値要素を区別するためのものである。ハッセ図の→は各要素間の半順序関係を示す。MにアルゴリズムMINET(M)を適用すると、SⅡで求められる

M =

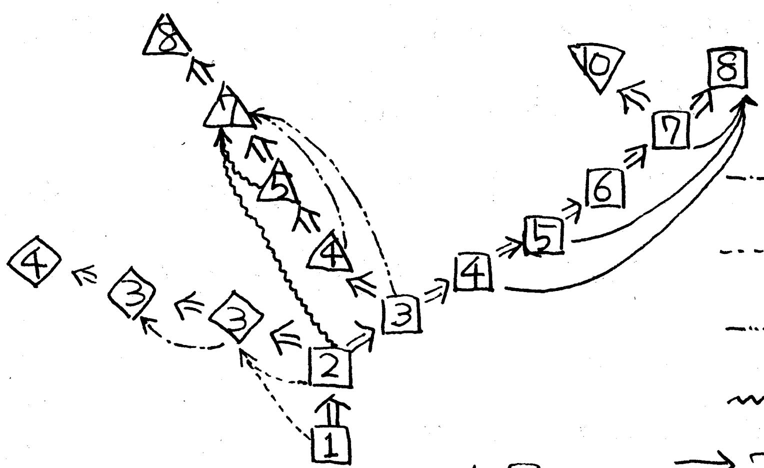
	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	⑯	⑰
①	∞	$\boxed{1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
②	1	∞	◇3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
③	1	3	∞	◇4	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
④	1	3	4	∞	◇3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
⑤	1	3	3	3	∞	$\boxed{2}$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
⑥	1	2	2	2	2	∞	△7	7	5	4	3	3	3	3	3	3	3
⑦	1	2	2	2	2	7	∞	△8	5	4	3	3	3	3	3	3	3
⑧	1	2	2	2	2	7	8	∞	△5	4	3	3	3	3	3	3	3
⑨	1	2	2	2	2	5	5	5	∞	△4	3	3	3	3	3	3	3
⑩	1	2	2	2	2	4	4	4	4	∞	$\boxed{3}$	3	3	3	3	3	3
⑪	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	∞	$\boxed{4}$	4	4	4	4	4
⑫	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	∞	$\boxed{5}$	5	5	5	5
⑬	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	5	∞	$\boxed{6}$	6	6	6
⑭	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	5	6	∞	$\boxed{10}$	7	7
⑮	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	5	6	10	∞	$\boxed{7}$	7
⑯	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	5	6	7	7	∞	$\boxed{8}$
⑰	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	5	6	7	7	8	∞

(在来構成法との比較)

Gomory と Hu [4]
(最小で)枝数 27

Wing と Chien [3]
(最小で)枝数 26

本構成法
枝数 23



(図1) Mのハッセ図

(要素の和分解式)

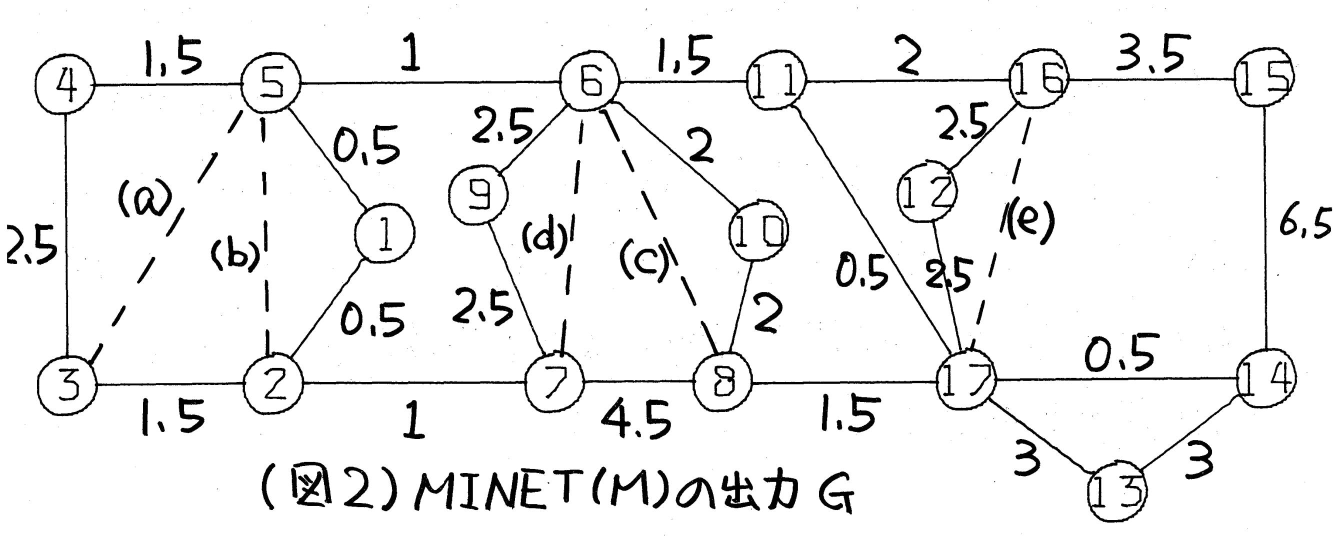
→ ◇3 = ◇3 (a)

→ ◇3 = $\boxed{2}$ + $\boxed{1}$ (b)

→ △7 = △4 + $\boxed{3}$ (c)

→ △7 = △5 + $\boxed{2}$ (d)

→ 2×$\boxed{8}$ = $\boxed{7}$ + $\boxed{6}$ + $\boxed{5}$ (e)



(図2) MINET(M)の出力 G

要素の和分解式が(a)〜(e)である。ハッセ図に付加してある⇒以外の矢印は、各和分解式で用いた要素を表している。（図２）はMINET(M)の出力Gである。点線の枝は、各和分解式によって容量が零となり消滅した枝を示す。（定理2)より枝数は(n=17，P＝４，Q＝５であるから）２３である。（在来の構成法との比較）で記したようにMINET(M)は在来の構成法より真に少ない枝数で実現するが、これは次の理由による。

分解式(a)…… GomoryとHu[4]の構成法で自動的に発見できる可能性を持つ。WingとChien[3]の構成法では必ず自動的に発見される。

分解式(b)…… WingとChienの構成法で発見される可能性をもつ。

分解式(c),(d),(e)…… 本構成法のみで発見できる。

4．むすび

例題ではQ＝５であるが、Qがこれより大きいと枝数はさらに減少する。今後の第一の課題は一般の場合のQの最大化問題を解くことである。この問題はパッキング問題に類似しているが、式数の最大化問題であるところが異なる。第二の課題はQの最大値による構成が、枝容量和最小実現中で枝数最小であるという予想を証明することである。いずれにしても困難が予想される。

本文の結果は、枝容量和最小で枝数最小化は一般に未知のものであることを示し、在来の構成法以下の正確に見積もれる枝数で構成するアルゴリズムを提案したものである。

〈参考文献〉

[1] W. Mayeda, "Terminal and branch capacity matrices of a communication net," IRE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-7 p.p. 261-270; September, 1960

[2] R. T. Chien, "Synthesis of a communication net," IBM J., vol 4, pp 311-320; July 1960

[3] O. Wing and R. T. Chien, "Optimal synthesis of a communication net," IRE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-8 pp. 44-49; March 1961

[4] R. E. Gomory and T. C. Hu, "Multi-terminal network flows," J. SIAM, vol 9, pp. 551-557; December, 1961

[5] R. T. Chien, R. E. Gomory and T. C. Hu, "Communication networks," IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-11, pp. 19-22; March, 1964

[6] A. A. Assad, "Multicommodity network flows - a survey," Networks an Inter. J., vol. 8, pp. 37-91; Spring, 1978

[7] 小沢 孝夫, "対称ゲージ行列(端子間容量行列)を実現する木について," 電子通信学会論文誌(A), vol J60-A, pp 836-843; September, 1977